



MINISTERUL EDUCAȚIEI



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

“TEHNICI MATEMATICE“- ediția a XIX-a

Etapa județeană 23.02.2024

Barem de corectare

Clasa a XI-a – Matematică *M_șt-nat*

Subiectul I (30 p)

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$1 p

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$1 p

$\det(C + I_3) = \det[C^{n-1}(C + I_3)]$3 p

$\det(C + I_3) = 8$1 p

$\det[C^{n-1}(C + I_3)] = [\det(C)]^{n-1} \cdot \det(C + I_3) =$2 p

$= 1^{n-1} \cdot 8 = 8$2 p

b) $X^2 + 2X + 4I_3 = O_3$3 p

$(X - 2I_3)(X^2 + 2X + 4I_3) = O_3$3 p

$X^3 - 8I_3 = O_3$3 p

$X = 8I_3$1 p

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5(y-x) & 10 \\ x & (y-x)(4x+y) & 6x+4y \\ x^2 & (y-x)(3x^2+2xy) & 3x^2+6xy+y^2 \end{vmatrix} =$

$= (y-x) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ x & 4x+y & 6x+4y \\ x^2 & 3x^2+2xy & 3x^2+6xy+y^2 \end{vmatrix} =$3 p

$= (y-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ x & 1 & x+4y \\ x^2 & 2x & -2x^2+6xy+y^2 \end{vmatrix} =$2 p



$$= (y - x)^3 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ x & 1 - 5x & 4 \\ x^2 & -5x^2 + 2x & 7x + y \end{vmatrix} = \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$= (y - x)^4 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

Subiectul II (30 p)

a) $f \circ f(x) = \frac{5x-1}{10-x} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$

$$f \circ f \circ f(x) = \frac{9x+8}{8x-31} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [(f \circ f \circ f)(x)]^2 = \frac{81}{64} \dots\dots\dots 4 \text{ p}$$

b) f are limită în $x_0 = 0 \Leftrightarrow l_s(0) = l_d(0) \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

$$l_s(0) = a + 2 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$l_d(0) = \frac{1}{6} \ln \frac{2}{3} + 3 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$a = \ln \sqrt[6]{\frac{2}{3}} + 1 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{x^3 \sqrt[3]{x} + x - \sqrt[3]{x} - 1}{x^3 \sqrt[3]{x} - x + \sqrt[3]{x} - 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1}} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(x - 1)}{(\sqrt[3]{x} - 1)(x + 1)} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1}} = \dots\dots\dots 3 \text{ p}$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1}} = \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \right)^{\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\infty} = 0 \dots\dots\dots 4 \text{ p}$$

Subiectul III (30 p)

a) $\Delta = \begin{vmatrix} a & 2a^2 + a & 1 \\ b & 2b^2 + b & 1 \\ c & 2c^2 + c & 1 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a) \begin{vmatrix} a & 2a^2 + a & 1 \\ b & 2b + 2a + 1 & 0 \\ c & 2c + 2a + 1 & 0 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots 4 \text{ p}$

$$= (b - a)(c - a) \begin{vmatrix} 1 & 2b + 2a + 1 \\ 1 & 2c + 2a + 1 \end{vmatrix} = 2(b - a)(c - a)(c - b) \dots\dots\dots 4 \text{ p}$$

$a \neq b \neq c \neq a \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow A, B, C$ nu sunt coliniare $\dots\dots\dots 2 \text{ p}$



MINISTERUL EDUCAȚIEI



b) $A_{\Delta ABC} = |(b-a)(c-a)(c-b)| \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

Dacă a, b, c au aceeași paritate, fiecare dintre modulele $|b - a|, |c - a|, |c - b|$ sunt numere naturale divizibile cu 2.4 p

Dacă două dintre numerele a, b, c au parități diferite față de al treilea, unul dintre modulele $|b - a|, |c - a|, |c - b|$ este număr natural divizibil cu 2.4 p

c) $m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

$m_{AB} = 2a + 2b + 1, m_{AC} = 2a + 2c + 1 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

$(2a + 2b + 1)(2a + 2c + 1) = -1$, de unde rezultă sistemele:

$\begin{cases} 2a + 2b + 1 = 1 \\ 2a + 2c + 1 = -1 \end{cases}$ cu soluțiile $(a, b, c) = (-1 - \alpha, 1 + \alpha, \alpha), (\forall) \alpha \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$

$\begin{cases} 2a + 2b + 1 = -1 \\ 2a + 2c + 1 = 1 \end{cases}$ cu soluțiile $(a, b, c) = (-\alpha, -1 + \alpha, \alpha), (\forall) \alpha \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$