



MINISTERUL EDUCAȚIEI



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-ediția a XIX-a
Etapa județeană 23.02.2024
Clasa a XII -a Matematică *M_șt-nat*

Subiectul I

5p 1. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică. Determinați rația progresiei dacă $(b_1 + b_2) \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right) = 0$.

5p 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$. Determinați funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ g)(x) = 3x + 5, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p 3. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuațiile $\log_2(x^2 + mx + 2) = 2$ și $\sqrt{x^2 + x - 1} = x$ au o soluție comună.

5p 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr natural n din mulțimea $\{2, 3, \dots, 16\}$ acesta să verifice inegalitatea $C_n^2 + A_n^2 \leq 45$.

5p 5. În reperul cartezian xOy se dau punctele $A(1, 2), B(4, 5), C(6, 3)$. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin mijlocul medianei din vârful A al triunghiului ABC și este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x + 5$.

5p 6. Într-un triunghi ABC , $\cos A = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{4}{5}$. Arătați că triunghiul este dreptunghic.

Subiectul II

1. Se consideră matricele $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ și $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $\det(A(\alpha)) = 1$.

5p b) Demonstrați că $A(\alpha) \cdot A(\beta) = A(\alpha + \beta)$ pentru orice numere reale α și β .

5p c) Calculați $\sum_{k=3}^{2024} \det(B^k)$.

2. Pe mulțimea $G = \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ se definește legea de compoziție $x * y = \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(y + \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}$.

5p a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție.

5p b) Să se arate că funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(x + \frac{3}{2}\right)$ este izomorfism între grupurile

$(G, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

5p c) Rezolvați ecuația

$$(x+1) * (x+2) * \dots * (x+10) * \left(\frac{1}{1+\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\right) * \left(\frac{1}{2+\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\right) * \dots * \left(\frac{1}{10+\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-ediția a XIX-a
Etapa județeană 23.02.2024
Clasa a XII -a Matematică *M_șt-nat*

Subiectul III

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} - \{b\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x-b}, b \in \mathbb{R}^*$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 - 2xb}{(x-b)^2}, \forall x \in \mathbb{R} - \{b\}$.

5p b) Să se determine $b \in \mathbb{R}^*$, știind că dreapta $y = x + 2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

5p c) Să se determine $b \in \mathbb{R}^*$, știind că distanța dintre punctele de extrem ale graficului funcției f este $2\sqrt{5}$.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{2x} - 1, g(x) = \frac{f(x)}{2e^x}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 x \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right) dx = 1$.

5p b) Calculați $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{g(x)} dx$.

5p c) Calculați partea întreagă a numărului $I = \int_{-2024}^{2024} \frac{f(x)}{e^{2x} + 1} dx$.

Fiecare subiect are 30 puncte
Se acordă 10 puncte din oficiu
Timp de lucru 180 minute

Subiectele au fost selectate și propuse de:
Prof. Necșuliu Ion, C.N. Mircea cel Bătrân
, Rm. Vâlcea