CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-editia a XIX-a
Etapa națională 23.03.2024
Clasa a IX -a Matematică *M_șt-nat*

Subiectul I

Fie *O* și *H* centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului *ABC*. Notăm cu O_1, O_2, O_3 centrele circumscrise triunghiurilor *HBC, HAC* respectiv *HAB.*

a) Poate fi triunghiul *ABC* dreptunghic ? Justificați

b) Demonstrați că *A* este ortocentrul triunghiului *BHC*

c) Arătați că pentru orice punct $M \in OH$, vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{MO_3}$ este coliniar cu $\overrightarrow{OH}$.

(prelucrare G.M nr. 4/2022)

Subiectul II

Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - 6x + 1 = 0$ și $S_n = x_1^n + x_2^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculați S_1, S_2, S_3

b) Arătați că S_n este număr întreg pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

c) Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}^*$astfel încât S_n să se dividă cu 5.

Subiectul III

a) Arătați că $P(n) = (n^2 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) + n^2(n + 1)$ este divizibil cu $(n^3 + 1)$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

b) Rezolvați inecuația $\frac{P(n)}{n+1} \geq 49$, unde

$$P(n) = (n^2 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) + n^2(n + 1), (\forall)n \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

c) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $R(k) = (n^2 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n + 1) \cdot n^{3k-1}$ este divizibil cu $(n^3 + 1)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru fiecare subiect se acordă 30 puncte
Se acordă 10 puncte din oficiu
Timp de lucru 120 minute

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
Prof.Aron Roxana
Prof.Dicu Florentina
Prof. Drăgan Elena