CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

“TEHNICI MATEMATICE“- ediția a XIX-a

Etapa națională 23.03.2024

Barem de corectare

Clasa a XI-a – Matematică *M_șt-nat*

Subiectul I (30 p)

a) $X(a) = \begin{pmatrix} 3a+1 & 3a \\ -2a & -2a+1 \end{pmatrix}$...2 p

$X(a) \cdot X(b) = \begin{pmatrix} 3(ab+a+b)+1 & 3(ab+a+b) \\ -2(ab+a+b) & -2(ab+a+b)+1 \end{pmatrix}$.....................................4 p

$X(a) \cdot X(b) = X(ab+a+b)$...4 p

b) $A^n = A, pentru\ orice\ n \geq 2, n \in \mathbb{N}$...2 p

$\left(X(1)\right)^n = (I_2 + A)^n = C_n^0 I_2 + C_n^1 A + C_n^2 A + \cdots + C_n^n A$.....................................4 p

$\left(X(1)\right)^n = (2^n - 1) \cdot A + I_2$. ....4 p

c) $X(a) \cdot X(b) = X\big((a+1)(b+1) - 1\big)$...2 p

$X(1) \cdot X(2) = X(3! - 1)$...1 p

$P(k)$: $X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(k) = X\big((k+1)! - 1\big), k > 1$.....................................2 p

$P(k) \longrightarrow P(k+1)$

$$P(k+1):\ X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(k+1) = X\big((k+1)! - 1\big) \cdot X(k+1) =$$

$= X\big((k+1)!\,(k+2) - 1\big) = X\big((k+2)! - 1\big)$...2 p

$k = 2024 \Longrightarrow X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(2024) = X(2025! - 1)$.....................................2 p

$X(t-1) = X(2025! - 1) \Longrightarrow t = 2025!$...1 p

Subiectul II (30 p)

a) $l_s(-2) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{ln[(x+2)+1]}{x+2} \cdot \frac{1}{x+3} = 1$...4 p

$l_s(-2) = l_d(-2) = f(-2) = 1 \Longrightarrow f\ continu$ă în $x_0 = -2$ (i).....................................2 p

$l_s(-1) = l_d(-1) = f(-1) = -1 \Longrightarrow f\ continu$ă în $x_0 = -1$ (ii).....................................2 p

Pe $(-3,-2)$ f este continuă deoarece este raport de funcții elementare, pe $(-2,-1)$ și $(-1,\infty)$ este continuă deoarece este elementară (iii).....................................1 p

Din (i), (ii) și (iii) $\Rightarrow f$ continuă pe $(-3,+\infty)$..1 p

b) $f(x) = ax^2 + ax - 1$ este restricția lui f la intervalul $(-1,+\infty)$

$x_V = -\frac{1}{2}$ $și\ a > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2},\infty\right) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0,1]$................2 p

$\Rightarrow f$ injectivă$\Rightarrow$ $f(x) = 0$ are cel mult o soluție în $[0,1]$..3 p

f continuă pe $[0,1]$ $\Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux pe $[0,1]$..2 p

$$f(0) = -1 < 0, f(1) = 2a - 1 > 0, (\forall)a > \frac{1}{2} \Rightarrow f(0)\cdot f(1) < 0 \Rightarrow (\exists) cel\ puțin\ un$$

$c \in (0,1) a.î. f(c) = 0$..2 p

c este soluție unică a lui $f(x) = 0$ pe intervalul $[0,1]$..1 p

c) $L = 2\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x^2-x}-1+1-cos(2x-2)}{(x-1)(x+2)} = 2\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{x^2-x}-1}{(x-1)(x+2)} + \frac{1-cos(2x-2)}{(x-1)(x+2)}\right)$..3 p

$L_1 = \lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x^2-x}-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}$..3 p

$L_2 = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1-cos(2x-2)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2sin^2(x-1)}{(x-1)^2}\cdot\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)} = 0$..3 p

$L = \frac{2}{3}$..1 p

Subiectul III (30 p)

a) d $= \begin{vmatrix} b^2 & a^2 & 0 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ 0 & c^2 & b^2 \end{vmatrix} = -2a^2b^2c^2 \neq 0$..6 p

$\Rightarrow$sistem Cramer, deci are soluție unică..4 p

b) $x_0 = \frac{b^4+c^4-a^4}{2b^2c^2}, y_0 = \frac{a^4+c^4-b^4}{2a^2c^2}, z_0 = \frac{b^4+a^4-c^4}{2b^2a^2}$ ....6 p

$|x| < 1 \Leftrightarrow (b^2+c^2-a^2)(b^2+c^2+a^2) > 0\ și (b^2-c^2-a^2)(b^2-c^2+a^2) < 0$ inegalități care rezultă din ipoteza problemei..3 p

Analog se arată $|y| < 1$și $|z| < 1$...1 p

c) $x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\right) - \frac{a^4}{2b^2c^2} \geq 1 - \frac{a^4}{2b^2c^2}, cu\ egalitate\ pentru\ b^2 = c^2$...................................4 p

$x_0 + y_0 + z_0 \geq 3 - \frac{a^6+b^6+c^6}{2a^2b^2c^2}$..4 p

Valoarea minimă a sumei se obține pentru $a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = \frac{3}{2}$ ....2 p