CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

“TEHNICI MATEMATICE“- ediția a XIX-a

Etapa națională 23.03.2024

Barem de corectare

Clasa a XI-a – Matematică *M_tehnologic*

Subiectul I (30 p)

a) a) $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$..2 p

$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}$ ....,,,.2 p

$\begin{pmatrix} 2c-3b & 2d-2a-3b \\ 3a+3c-3d & 3b-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$..2 p

$2c-3b=1$ și $3b-2c=1 \Rightarrow 1=-1$ $fals$..4 p

b) $f(C+D) = A(C+D)-(C+D)A = AC+AD-CA-DA$..3 p

$f(C)+f(D) = AC-CA+AD-DA$..3 p

$f(C+D) = f(C)+f(D)$..4 p

c) $f(A^k) = A \cdot A^k - A^k \cdot A = A^{k+1} - A^{k+1} = O_2, (\forall)\ k \geq 1$.....................................2 p

$P(n): f(A+A^2+\cdots+A^n) = f(A)+f(A^2)+\cdots+f(A^n), n > 1$...............................2 p

$P(n) \to P(n+1)$

$P(n+1)$: $f(A+A^2+\cdots+A^{n+1}) = f(A+A^2+\cdots+A^n) + f(A^{n+1}) =.$

$= f(A)+f(A^2)+\cdots+f(A^{n+1})$..3 p

$f(A)+f(A^2)+\cdots+f(A^n) = O_2, (\forall)\ n \geq 1$.. ....3 p

Subiectul II (30 p)

a) $x \to -\infty \Rightarrow |2-x| = 2-x, |2x-3| = 3-2x$..4 p

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{-6x+3} = -\frac{1}{3}$...6 p

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+2}{-6x+3}, x \in \left(-\infty. -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ \frac{2x+2}{-2x-3},\ x \in \left[\frac{3}{2},\ 2\right] \\ \frac{4x-2}{-2x-3},\ x \in (2. +\infty) \end{cases}$ ....4 p

$l_s\left(\frac{3}{2}\right) = l_d\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{6} \Rightarrow f$ continuă în $x_0 = \frac{3}{2}$ (i)..2 p

$l_s(2) = l_d(2) = f(2) = -\frac{6}{7} \Longrightarrow f$ continuă în $x_0 = 2$ (ii)..2 p

f continuă pe $\left(-\infty. -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2},\ 2\right)$ *și pe* $(2. +\infty)$ deoarece este operație cu funcții elementare (iii)

Din (i), (ii) și (iii) rezultă f continuă pe domeniul ei de definiție..2 p

c) Pentru $x \in \left(-\infty. -\frac{3}{2}\right) \setminus \left\{-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$, avem $\frac{2x+2}{-6x+3} = n \Longrightarrow x = \frac{3n-2}{6n+2} < \frac{3}{2}$, deci ecuația $f(x) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$ are soluție..3 p

Pentru $x \in \left[\frac{3}{2},\ 2\right]$ avem $\frac{2x+2}{-2x-3} = n \Longrightarrow x = \frac{-3n-2}{2n+2} < 0$, deci ecuația $f(x) = n,\ n \in \mathbb{N}^*$ nu are soluție..3 p

Pentru $x \in (2. +\infty)$ avem $\frac{4x-2}{-2x-3} = n \Longrightarrow x = \frac{-3n+2}{4n+2} < 0$, deci ecuația $f(x) = n,\ n \in \mathbb{N}^*$ nu are soluție..3 p

$f(x) = n,\ n \in \mathbb{N}^*$ are soluție unică pentru $x \in \left(-\infty. -\frac{3}{2}\right) \setminus \left\{-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$......................................1 p

Subiectul III (30 p)

a) $\triangle_{\triangle OA_0A_1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 15 & 1 \end{vmatrix} = -6$..6 p

$A_{\triangle OA_0A_1} = 3$..4 p

b) $\triangle_{\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}} = \begin{vmatrix} 2n+1 & (2n+1)^2+6 & 1 \\ 2n+3 & (2n+3)^2+6 & 1 \\ 2n+5 & (2n+5)^2+6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n+1 & (2n+1)^2 & 1 \\ 2n+3 & (2n+3)^2 & 1 \\ 2n+5 & (2n+5)^2 & 1 \end{vmatrix} =$..............4 p

$= \begin{vmatrix} 2n+1 & (2n+1)^2 & 1 \\ 2 & 8n+8 & 0 \\ 4 & 16n+24 & 0 \end{vmatrix} = 32n + 48 - 32n - 32 = 16$..4 p

$A_{\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}} = 8$..2 p

c) $A_k, A_l,\ A_n$ coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2k+1 & (2k+1)^2+6 & 1 \\ 2l+1 & (2l+1)^2+6 & 1 \\ 2n+1 & (2n+1)^2+6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$..3 p

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2k+1 & (2k+1)^2 & 1 \\ 2l+1 & (2l+1)^2 & 1 \\ 2n+1 & (2n+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$..3 p

$\Leftrightarrow 8(l-k)(n-l)(n-k) = 0$, ceea ce este imposibil..3 p

$A_k, A_l,\ A_n$ nu pot fi coliniare..1 p