



MINISTERUL EDUCAȚIEI



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-ediția a XIX-a
Etapa națională 23.02.2024
Clasa a XII -a Matematică *M_șt-nat*

Subiectul I

5p 1. Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ știind că $b_1 = \sqrt{\sqrt{2}}$ și $b_1 b_8 + b_3 b_6 = 256\sqrt{2}$.

5p 2. Fie ecuația $x^2 - 2x(4 - \sqrt{3}) + 3 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 . Calculați valoarea expresiei $E = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.

5p 3. Fie funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_x(x+1)$. Rezolvați ecuația $2^{f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot \dots \cdot f(x)} = 2024$.

5p 4. Fie $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i$. Determinați numărul complex z_3 dacă $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_1 + z_3| = |z_2 + z_3|$.

5p 5. Fie familia de drepte $d_n : 3nx - (n+1)y = 1, n \in \mathbb{N}$. Stabiliți câte drepte distincte din familia d_n au panta număr natural.

5p 6. Fie triunghiul ABC de arie S . Arătați că $6S \leq ab + ac + bc$.

Subiectul II

1. Se consideră matricele $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5p a) Arătați că $A(\alpha)$ este inversabilă și calculați inversa sa.

5p b) Arătați că $A\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot A\left(\frac{\pi}{6}\right) = A\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

5p c) Calculați $A^n(\alpha), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie $G = (-1, 1)$ și funcția $f : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ izomorfism între grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) .

5p a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție $*$.

5p b) Rezolvați ecuația $x*(x+1) = 0$.

5p c) Determinați operația $*$.

Subiectul III

1. Fie funcția $f : \left(\frac{1}{e}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)^2}$.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-ediția a XIX-a
Etapa națională 23.02.2024
Clasa a XII -a Matematică *M_șt-nat*

5p b) Demonstrați că funcția este concavă.

5p c) Determinați abscisa punctului în care tangenta la grafic trece prin originea sistemului de coordonate.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$.

5p a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x f(\sin x) dx = e - 1$.

5p b) Să se arate că funcția $g : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \int_0^{\sqrt{\ln t}} f(x) dx$ este strict crescătoare pe $(1, \infty)$.

5p c) Demonstrați că $\frac{4}{3} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e - 1$.

Pentru fiecare subiect se acordă 30 puncte
Se acordă 10 puncte din oficiu
Timpe de lucru este de 180 minute

Subiectele au fost selectate și propuse de:
Prof. Necșuliu Ion, Rm. Vâlcea
Prof. Barbu Daniela, Rm. Vâlcea