CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-editia a XIX-a
Etapa națională, 23.03.2024
Clasa a XII -a Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I

1. Determinați numerele complexe z pentru care $|z| = 1$ și $(z-1)(\bar{z}+i) \in \mathbb{R}$, unde $\bar{z}$ reprezintă conjugatul numărului complex z.

2. Determinați valorile parametrului real m pentru care distanța de la vârful parabolei asociată funcției $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + (1-3m)x - 3$, la axa *Oy*, este egală cu 2.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{\frac{3x-2}{2x+2}} + 3^{\frac{4x-1}{x+1}} = 36$.

4. Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Se alege la întâmplare o submulțime a mulțimii *A*. Care este probabilitatea ca submulțimea aleasă să aibă exact trei elemente numere impare.

5. Să se determine valorile întregi ale parametrului a pentru care numerele $a,\ a+1,\ a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

6. Să se calculeze $4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Pentru $a = -1$ aflați matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Aflați $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $\det(I_3 + A + A^2) \leq 4$.

c) Determinați valorile parametrului real a pentru care matricea
$B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este inversabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + 2^{xy} - 1$.

a) Determinați numărul real a pentru care $a * 1 = (-1) * (-a)$.

b) Aflați numerele reale x astfel încât $x * 2x \leq (3x+1) * (-1)$.

c) Determinați numărul natural nenul n pentru care $2 * \log_2 n = 2 * \log_2 \frac{n}{2} + 4$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x + m)e^{2x}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați ecuația asimptotei la graficul funcției spre $-\infty$.

b) Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care funcția admite puncte de extrem.

c) Pentru $m = 1$, verificați dacă axa *Ox* este tangentă la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+3} + a, & x < -1 \\ x^2 - x - 2, & x \geq -1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinați numărul real a astfel încât funcția f să fie contiună pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $a = 2$ calculați $\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

c) Arătați că $2(2n+1)\int_{-1}^{2} f^n(x)dx + 9n\int_{-1}^{2} f^{n-1}(x)dx = 0$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Fiecare subiect are 30 puncte
Se acordă 10 puncte din oficiu
Timp de lucru 180 minute

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
Prof Barbu Daniela, Rm. Vâlcea
Prof. Necșuliu Ion, Rm. Vâlcea