CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-ediția a XIX-a
Etapa națională 23.03.2024
BAREM Clasa a XII -a *M_Tehnologic*

SUBIECTUL I

1)	Fie $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ cu $\|z\| = 1$ și $(z-1)(\bar{z} + i) \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 - a - b + (a + b - 1)i \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $a + b - 1 = 0,\ b = 1 - a$ Cum $\|z\| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$. Se obține $2a(a-1) = 0$. $\Rightarrow a = 0$ sau $a = 1$. Deci $(a, b) \in \{(0,1); (1,0).\}$ și numerele sunt: $z = 1$ sau $z = i$.	3p 2p
2)	$\left\|-\frac{b}{2a}\right\| = 2 \Leftrightarrow \|3m - 1\| = 8 \Rightarrow 3m - 1 = 8$ sau $3m - 1 = -8$. $m = 3$ sau $m = -\frac{7}{3}$.	3p 2p
3)	$x \neq -1$, ecuația devine $3^{\frac{3x-2}{x+1}} \cdot (1+3) = 36 \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-2}{x+1}} = 3^2$ $\frac{3x-2}{x+1} = 2 \Rightarrow x = 4$ satisface cerința.	3p 2p
4)	Sunt 2^7 cazuri posibile. În mulțímea A sunt 4 numere impare $\Rightarrow$ sunt 4 submulțimi cu trei elemente. Submulțimile cu 4, 5 respectiv 6 elemente, din care exact 3 sunt numere impare, se obțin adăugând 1, 2 respectiv 3 numere pare din mulțimea A. Cum $C_3^1 = C_3^2 = 3$ se obțin $4 \cdot (1 + 3 + 3 + 1) = 32$ cazuri favorabile $\Rightarrow P = \frac{1}{4}$.	2p 3p
5)	$a + 2 > a + 1 > a$ *și* $a \geq 1$. Latura care se opune unghiului obtuz (notat A) este a+2 și $\cos A < 0$. Teorema cosinusului pentru unghiul A: $\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-2a-3}{2a(a+1)} < 0 \Leftrightarrow a \in (-1,3) \cap \mathbb{Z}$. $a = 1$ nu covine , soluție: $a = 2$.	2p 3p
6)	$4 \cdot \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12} = 2 \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{12} = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} =$ $=2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL II

1)	a) Fie $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ s & p & q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} t & u & v \\ s & p & q \\ -x & -y & -z \end{pmatrix}$ și $B \cdot A = \begin{pmatrix} -z & x & y \\ -v & t & u \\ -q & s & p \end{pmatrix}$ Din $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ -z & x & y \\ -y & -z & x \end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.	2p 3p
	b) $\det(I_3 + A + A^2) = (a-1)^2$, $(a-1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq a - 1 \leq 2$ $-1 \leq a \leq 3$. Numerele întregi care verifică cerința sunt $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$	3p 2p
	c) $B_n = A^n \cdot (I_3 + A + A^2)$, $\det B_n = \det(A^n) \cdot \det(I_3 + A + A^2) = (\det A)^n (a-1)^2 = a^n (a-1)^2$ B_n inversabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ dacă $a^n(a-1)^2 \neq 0$, $a \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$ verifică cerința.	3p 2p
2)	a) $a * 1 = (-1) * (-a) \Leftrightarrow a + 1 + 2^a - 1 = -1 - a + 2^a - 1$ $2a = -2 \Rightarrow a = -1$.	2p 3p

	b) $x * 2x \le (3x+1) * (-1) \Leftrightarrow x + 2x + 2^{2x^2} - 1 \le 3x + 1 - 1 + 2^{-3x-1} - 1 \Leftrightarrow 2^{2x^2} \le 2^{-3x-1}$ $2x^2 \le -3x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 \le 0$, soluție $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.	2p 3p
	c) $2 * \log_2 n = 2 * \log_2 \frac{n}{2} + 4 \Leftrightarrow 2 + \log_2 n + 2^{2\log_2 n} - 1 = 2 + \log_2 \frac{n}{2} + 2^{2\log_2 \frac{n}{2}} - 1 + 4 \Leftrightarrow$ $\log_2 n + n^2 + 1 = \log_2 n + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + 4 \Leftrightarrow \frac{3n^2}{4} = 3$. Numărul natural care verifică cerința este $n = 2$.	3p 2p
SUBIECTUL III		
1)	a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = (\infty \cdot 0) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x+m}{e^{-2x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+2}{-2e^{-2x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{4e^{-2x}} = 0$ $y = 0$ este ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției spre $-\infty$.	3p 2p
	b) f derivabilă pe $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{2x}(x^2 + 3x + m + 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. f are puncte de extrem $\Rightarrow x^2 + 3x + m + 1 = 0$ are două soluții nr reale $\Rightarrow 9 - 4(m+1) > 0$ $\Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$. Cel mai mare număr întreg care verifică cerința este $m = 1$.	2p 3p
	c) Pentru $m = 1$ avem $f(x) = (x+1)^2 e^{2x}$ și $f'(x) = 2e^{2x}(x^2 + 3x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$. Ecuația $f(x) = (x+1)^2 e^{2x} \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow A(-1, 0)$ este punctul de intersecție a graficului funcției cu axa *Ox*. Verificăm panta tangentei la graficul funcției în punctul $A(-1,0)$: $f'(-1) = 0$. Se obține că axa *Ox* este tangentă la graficul funcției în punctul $A(-1, 0)$.	3p 2p
2)	a) f continuă pentru $x \in (-\infty, -1)$ și pentru $x \in (-1, \infty)$. f continuă pe $\mathbb{R}$, deci $ls(-1) = ld(-1) = f(-1) \Rightarrow -2 + a = 0 \Rightarrow a = 2$.	2p 3p
	b) Pentru $a = 2$ f continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive $\Rightarrow$ $\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} \left(x\sqrt{x^2+3} + 2\right) dx + \int_{-1}^{0} x^2 - x - 2dx$ $\int_{-2}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3} \Big\vert_{-2}^{-1} + 2x \Big\vert_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right) \Big\vert_{-1}^{0} =$ $= \frac{1}{3}\left(8 - 7\sqrt{7}\right) - 6 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{27 + 14\sqrt{7}}{6}$	2p 3p
	c) $I = \int_{-1}^{2} f^n(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} (2x-1)' \cdot f^n(x)\, dx = \frac{1}{2}(2x-1) \cdot f^n(x) \Big\vert_{-1}^{2} - \frac{n}{2}\int_{-1}^{2} (2x-1)^2 \cdot f^{n-1}(x)\, dx$ $I = -\frac{n}{2}\int_{-1}^{2} (4 \cdot f(x) + 9) \cdot f^{n-1}(x)\, dx = -\frac{n}{2}\int_{-1}^{2} \left(4 \cdot f^n(x) + 9f^{n-1}(x)\right) dx$ $I = -\frac{4n}{2} I - \frac{9n}{2}\int_{-1}^{2} f^{n-1}(x)dx \Leftrightarrow 2(2n+1)\int_{-1}^{2} f^n(x)dx + 9n\int_{-1}^{2} f^{n-1}(x)dx = 0, n \in \mathbb{N}, n \ge 2.$	2p 3p