CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-editia a XIX-a
Etapa națională 23.03.2024
Clasa a IX -a Matematică *M_șt-nat*

Subiectul I

Fie *O* și *H* centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului *ABC*. Notăm cu O_1, O_2, O_3 centrele circumscrise triunghiurilor *HBC*, *HAC* respectiv *HAB*.

a) Poate fi triunghiul *ABC* dreptunghic ? Justificați
b) Demonstrați că *A* este ortocentrul triunghiului *BHC*
c) Arătați că pentru orice punc $M \in OH$, vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{MO_3}$ este coliniar cu $\overrightarrow{OH}$.

(prelucrare G.M nr. 4/2022)

Barem:

a) Presupunem că ΔABC este dreptunghic, ortocentrul ar fi într-unul din vârfurile triunghiului deci, ca să existe triunghiurile *HBC*, *HAC* respectiv *HAB* este necesar ca triunghiul *ABC* să nu fie dreptunghic 10p
b) Deoarece $BH \perp AC, CH \perp AB, AH \perp BC \implies A$ ortocentrul ΔHBC.........................10p
c) Folosind teorema lui Sylvester, obținem:
$\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{O_1H} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} \implies \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO_1} = \left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OO_1}\right) + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO_1}\right) + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO_1}\right) \implies \overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$...2p
Analog $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OO_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$..4p
Deoarece $M \in OH$, există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât:
$\overrightarrow{OM} = \alpha \cdot \overrightarrow{OH} \implies \vec{v} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{OO_3} - 3\overrightarrow{OM} =$..2p
$= (2 - 3\alpha) \cdot \overrightarrow{OH} \implies \vec{v}$ și $\overrightarrow{OH}$ coliniari...2p

---

30 puncte

Subiectul II

Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - 6x + 1 = 0$ și $S_n = x_1^n + x_2^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculați S_1, S_2, S_3
b) Arătați că S_n este număr întreg pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$
c) Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}^*$astfel încât S_n să se dividă cu 5.

Barem:

a) $S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 6$; p=1...3p
$S_2 = x_1^2 + X_2^2 = S_1^2 - 2p = 36 - 2 = 34$..3p
$S_3 = S_1^3 - 3pS = 6^3 - 3 \cdot 1 \cdot 6 = 198$..4p
b) $S_n = 6S_{n-1} - S_{n-2}$ pentru orice $n \geq 3$...5p

Folosind inducția rezultă $S_n \in \mathbb{Z}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$...5p

c) Presupunem că există n astfel încât $S_n \vdots 5$...2p
Cum $S_3 = 6S_2 - S_1 = 198 \implies n > 3$...2p
Adunând relațiile $S_n = 6S_{n-1} - S_{n-2}$ și $S_{n-1} = 6 \cdot S_{n-2} - S_{n-3}$ rezultă că $S_n = 5S_{n-1} + 5S_{n-2} - S_{n-3}$ deci $S_{n-3} \vdots 5$..3p
Continuând procedeul se ajunge la $E_1 \vdots 5$ sau $E_2 \vdots 5$ sau $E_3 \vdots 5$, ceea ce este fals.....3p

30 puncte

Subiectul III

a) Arătați că $P(n) = (n^2 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) + n^2(n + 1)$ este divizibil cu $(n^3 + 1)$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$

b) Rezolvați inecuația $\frac{P(n)}{n+1} \geq 49$, unde $P(n) = (n^2 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) + n^2(n + 1)$, $(\forall)n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

c) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $R(k) = (n^2 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n + 1) \cdot n^{3k-1}$ este divizibil cu $(n^3 + 1)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$

Barem:

a) $P(n) = n^5 - n^4 + n^3 - n^2 - n^3 + n^2 - n + 1 + n^3 + n^2 =$
$= n^5 - n^4 + n^3 + n^2 - n + 1 =$
$n^2(n^3 + 1) - n(n^3 + 1) + (n^3 + 1) =$...5p
$= (n^3 + 1)(n^2 - n + 1) \vdots (n^3 + 1)$...5p

b) $\frac{P(n)}{n+1} \geq 49 \iff \frac{(n+1)(n^2-n+1)^2}{n+1} \geq 49 \iff$..3p
$\iff (n^2 - n + 1)^2 - 49 \geq 0 \iff (n^2 - n - 6)(n^2 - n + 8) \geq 0$...........................3p
$\iff n^2 - n - 6 \geq 0 \implies n \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$
....4p

c) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar ales. Demonstrăm prin inducție matematică

I. $k = 1 \implies R(1) = P(n) \vdots (n^3 + 1)$ din a)..2p

II. $R(k) \to R(k + 1)$

$R(k) = (n^2 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n + 1) \cdot n^{3k-1} \vdots (n^3 + 1)$
adevarat

$R(k + 1) = (n^2 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^{k+1} + (n + 1) \cdot n^{3k+2} =$
$= (n^2 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k(n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1) \cdot n^{3k+2} =$
$= [(n^2 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n + 1)n^{3k-1} - (n + 1)n^{3k-1}](n^3 - n^2 + n - 1) +$
$+(n + 1) \cdot n^{3k+2} =$
$= [R(k) - (n + 1)n^{3k-1}](n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1) \cdot n^{3k+2} =$
$= R(k)(n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1) \cdot n^{3k-1}[n^3 - (n^3 - n^2 + n - 1)] =$
$= R(k)(n^3 - n^2 + n - 1) + (n^3 + 1) \cdot n^{3k-1} \vdots (n^3 + 1)$..5p

Deci, $R(k + 1) \vdots (n^3 + 1)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$..1p

Din I și II obținem $R(k) \vdots (n^3 + 1)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. 2p

30 puncte