CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-editia a XIX-a
Etapa naţională 23.03.2024
Clasa a IX -a Matematică *M_tehnologic*

Subiectul I

Se dă funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \max(x-3,\ 1-x)$

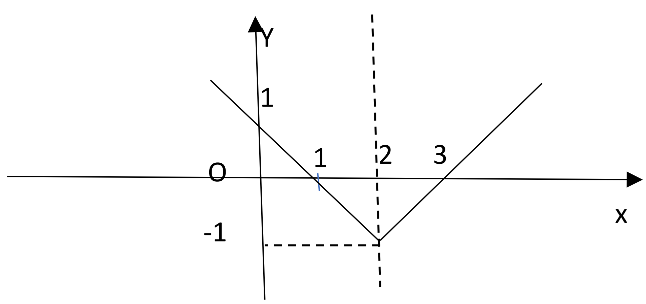
a) Reprezentați graficul funcției *f*;
b) Folosind reprezentarea grafică, discutați în funcție de valorile parametrului real m, numărul rădăcinilor ecuației:

$$\max(x-3,\ 1-x) = m;$$

c) Determinați mulțimea $\{x \in \mathbb{R} |\ f(x) \leq\ 0\}$.

Barem:

a) $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \geq 2 \\ 1-x, & x < 2 \end{cases}$ 5p
Reprezentarea corectă a graficului funcției..5p
b) Pentru $m > -1$ ecuația are două rădăcini..4p
Pentru $m = -1$ are o singură rădăcină..2p
Pentru $m < -1$, nu are nici o rădăcină..4p
c) Folosind rezolvarea inecuației prin metoda grafică sau altă metodă
$m \in [1,3]$..10p



30 puncte

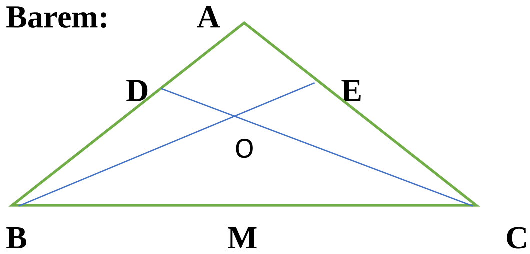
Subiectul II

În triunghiul ABC considerăm punctele $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$ astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$

Notăm cu M mijlocul laturii (BC) și $CD\ \cap BE = \{0\}$. Demonstrați că:

a) $DE \| BC$;
b) $BC = 3 \cdot DE$;
c) $O \in\ (AM)$ și $AO = OM$.

Barem:



a) $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{AD}$ 2p

$\overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AE}$ 2p

$\Longrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3 \cdot \left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\right) = 3 \cdot \overrightarrow{DE} \Longrightarrow$ 4p

$\Longrightarrow DE \| BC$ 2p

b) Din a) $\overrightarrow{BC} = 3 \cdot \overrightarrow{DE} \Longrightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|3 \cdot \overrightarrow{DE}\right| \Longrightarrow$ 5p

$\Longrightarrow BC = 3 \cdot DE$ 5p

c) $\Delta BOC \sim \Delta EOD \Longrightarrow \frac{BO}{OE} = \frac{3 \cdot DE}{OE}$ 2p

$\Longrightarrow \overrightarrow{BO} = 3 \cdot \overrightarrow{OE} \Longrightarrow \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = 3 \cdot \left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AO}\right) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 4 \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM} \Longrightarrow$ 5p

$2 \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AM} \Longrightarrow$ A, O, M coliniare$\Longrightarrow$ 2p

$\Longrightarrow$ O mijlocul lui (AM) 1p

---

30 puncte

Subiectul III

a) Determinați numărul $\left[\frac{\sqrt{7}}{\{\sqrt{7}\}}\right]$, unde prin $[x]$ și $\{x\}$ se înțelege partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x;

b) Rezolvați inecuația: $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + \left|\frac{x+2}{x-1}\right| \leq 2$;

c) Rezolvați ecuția: $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = \{x\}$.

Barem:

a) $\left[\sqrt{7}\right] = 2$ 1p

$\{\sqrt{7}\} = \sqrt{7} - \left[\sqrt{7}\right] = \sqrt{7} - 2$ 2p

$\Longrightarrow \left[\frac{\sqrt{7}}{\{\sqrt{7}\}}\right] = \left[\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}\right] = \left[\frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}+2)}{7-4}\right] = \left[\frac{7+2\sqrt{7}}{3}\right]$ 4p

$4 < \frac{7+2\sqrt{7}}{3} < 5$ 2p

$\Longrightarrow \left[\frac{\sqrt{7}}{\{\sqrt{7}\}}\right] = 4$ 1p

b) Notăm $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| = a > 0 \Longrightarrow$ 2p

$\Longrightarrow a + \frac{1}{a} \leq 2 \leftrightarrow (a-2)^2 \leq 0 \Longrightarrow a = 1$ 5p

$\Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$..2p

c) $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = \{x\} \in [0,1) \Longrightarrow \left[\frac{2x+1}{3}\right] = 0 \Longrightarrow$..3p

$\Longrightarrow 0 \leq \frac{2x+1}{3} < 1 \Longrightarrow 0 \leq 2x+1 < 3 \Longrightarrow -1 \leq 2x < 2$...3p

$\Longrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$, cum $\{x\} = 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = 0$...4p

---

30 puncte