



MINISTERUL EDUCAȚIEI



## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

“TEHNICI MATEMATICE“- ediția a XIX-a

Etapa națională 23.03.2024

Clasa a XI-a – Matematică *M\_șt-nat*

### Subiectul I

Se consideră matricea  $A \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$  și  $X(a) = I_2 + aA$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

a) Calculați  $X(a) \cdot X(b)$ .

b) Arătați că  $(X(1))^n = (2^n - 1) \cdot A + I_2$ .

c) Să se determine  $t \in \mathbb{R}$  astfel încât  $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2024) = X(t - 1)$ .

**Subiectul II** Fie funcția  $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(3+x)}{x^2+5x+6}, x \in (-3, -2) \\ -2x - 3, x \in [-2, -1] \\ ax^2 + ax - 1, x \in (-1, +\infty) \end{cases}$ .

a) Să se arate că funcția  $f$  este continuă pe domeniul ei de definiție,  $(\forall) a \in \mathbb{R}$ .

b) Demonstrați că funcția  $f$  are o singură rădăcină în intervalul  $I = [0, 1]$ ,  $(\forall) a > \frac{1}{2}$ .

c) Pentru  $a = \frac{1}{2}$ , calculați  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-x} - \cos(2x-2)}{f(x)}$ .

**Subiectul III** Fie sistemul  $\begin{cases} a^2y + b^2x = c^2 \\ c^2x + a^2z = b^2 \\ b^2z + c^2y = a^2 \end{cases}$ , unde  $a, b, c$  sunt numere reale nenule și

îndeplinesc condiția:  $|b^2 - c^2| < a^2 < b^2 + c^2$ .

a) Demonstrați că sistemul are soluție unică  $(x_0, y_0, z_0)$ .

b) Arătați că  $x_0, y_0, z_0$  sunt numere reale cu modulul subunitar.

c) Determinați valoarea minimă a sumei  $x_0 + y_0 + z_0$ .

Pentru fiecare subiect se acordă 30 puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpe de lucru 120 minute.

Subiectele au fost selectate și propuse de:

prof. Drăgan Elena

prof. Pozinărea Simona

Prof. Bologa Cristiana