Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudețean „Mathematica – Modus Vivendi”
Ediţia a XIX-a, 23 martie 2024
BAREM CLASA a X -a

1. a. $x > 0 \;=>\; x \in (0,\infty) \;=>\; D = (0,\infty)$
Notăm $\log_4(\sqrt[3]{x}+1) = \log_{27} x = t <=> x = 27^t <=> \log_4(\sqrt[3]{x}+1) = t$……………...…..1p
$\sqrt[3]{x}+1 = 4^t <=> \sqrt[3]{27^t}+1 = 4^t$……………………………………………………..…...1p
$3^t + 1 = 4^t$ cu soluţie unică $t = 1 <=> x = 27$...1p

b. Avem $x^{\log_{2a+1}(2a-1)} = (2a-1)^{\log_{2a+1} x}$ și ecuația devine...1p
$(2a-1)^{\log_{2a+1} x} + x = 2 + 4a^2 \cdot \log_{2a+1} x$..1p
Notăm $\log_{2a+1} x = y$ și ecuația ia forma
$(1)\;\; (2a-1)^y + (2a+1)^y = 2 + 4a^2 y$..1p
Cum funcția $y \to (2a-1)^y + (2a+1)^y$ este strict crescătoare și strict convexă, rezultă că ecuația (1) are cel mult două soluții. Întrucât $y_1 = 0$ și $y_2 = 2$ verifică ecuația (1), rezultă că ecuația dată are soluțiile: $x_1 = 1$ și $x_2 = (2a+1)^2$ 1p
----
Total = 7 puncte

2. a. $\mathrm{A} = \left(\sum_{k=1}^{2024^2-1} \frac{1}{2\sqrt{k}}\right) + 1$
$\frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} => \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$……………………………...…....1p
Notăm $\mathrm{S} = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2\sqrt{2024^2-1}}$
După ce dăm valori lui k,obținem
$\sqrt{2024^2} - 1 < \mathrm{S} < \sqrt{2024^2-1}$……………………………………………………………..1p
$2023 < \mathrm{S} < \sqrt{2024^2-1} < 2024$
$2024 < \mathrm{A} < 2025$
De unde [A] = 2024 ………………………………………………………………………1p

b.Notăm $\sqrt[3]{14x-15} = \frac{1}{14} \cdot (x^3+15) = t$
$\begin{cases} \sqrt[3]{14x-15} = t \\ \frac{1}{14} \cdot (x^3+15) = t \end{cases} <=> \begin{cases} 14x - 15 = t^3 \\ x^3 + 15 = 14t \end{cases}$ …………………………………………………1p
$x^3 + 14x = t^3 + 14t <=> x^3 + 14x - t^3 - 14t = 0$
$(x^3 - t^3) + 14 \cdot (x - t) = 0 <=> (x - t) \cdot \underbrace{(x^2 + tx + t^2 + 14)}_{+} = 0 <=> x = t$…………1p
$x^3 = 14x - 15 <=> x^3 - 14x + 15 = 0 <=> x = 3$ soluție ………………………...…..1p
$(x-3) \cdot (x^2 + 3x - 5) = 0 <=> x_1 = 3\,;\; x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$ ………...…………….…………1p
----
Total = 7 puncte

3. a. Notăm $\mathrm{A} = f(x^2 - x + 1)$; $\mathrm{B} = f(x^2 + x + 1)$
Din enunț $\mathrm{A} - 2 \cdot \mathrm{B} = -2x^2 - 6x - 3 \quad (1)$
Înlocuim $x \to -x$

$-2 \cdot f(x^2 - x + 1) + f(x^2 + x + 1) = -2x^2 + 6x - 3$
$-2\,\mathrm{A} + \mathrm{B} = -2x^2 + 6x - 3 \qquad (2)$
Din (1) și (2)
$\begin{cases} \mathrm{A} - 2 \cdot \mathrm{B} = -2x^2 - 6x - 3 \ \mid \cdot 2 \\ -2\,\mathrm{A} + \mathrm{B} = -2x^2 + 6x - 3 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{B} = 2x^2 + 2x + 3$……..……………..…………..1p
$f(x^2 + x + 1) = 2x^2 + 2x + 3 = 2 \cdot (x^2 + x + 1) + 1$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 2x + 1$……………………………………………………………2p

b. $6x^4 - x^3 + 6x^2 + 1 = 4x^3 - x^2 + 5x$
$\Leftrightarrow 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (2x - 1)(3x - 1)(x^2 + 1) = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ ;\ x_2 = \frac{1}{3}$……………………………………………………………1p
Pentru $x = \frac{1}{2}$ avem
$\left(3 \cdot f\left(\frac{11}{4}\right) - 2\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{2}{3}$ (1)……………………………………...………..…..1p
Pentru $x = \frac{1}{3}$ avem
$\left(3 \cdot f\left(\frac{46}{27}\right) - 2\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{46}{27}\right) = \frac{2}{3}$ (2)..…………..…1p

Din (1) și (2) f nu este injectivă...1p

Total = 7 puncte

4. a. $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1 \Leftrightarrow |a - b| < |1 - \bar{a}b| \Leftrightarrow (a - b)\left(\overline{a - b}\right) < (1 - \bar{a}b)\left(\overline{1 - \bar{a}b}\right)$……....1p
$\Leftrightarrow (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) < (1 - \bar{a}b)(1 - a\bar{b}) \Leftrightarrow 0 < a\bar{a}b\bar{b} - a\bar{a} - b\bar{b} + 1$
$\Leftrightarrow |a|^2 \cdot |b|^2 - |a|^2 - |b|^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow (|a|^2 - 1)(|b|^2 - 1) > 0$……………………..…..1p
Astfel : $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1 \Leftrightarrow |a|, |b| \in [0,1)$ sau $|a|, |b| \in (1, \infty)$……………………………….…..…..1p

b. Notăm $|z + 1| = a$ și $|z - 1| = b$; $a, b \in [0, \infty)$
Avem identitatea: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$, $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow |z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2|z|^2 + 2$…………………………………………………………....1p
Deducem că $\sqrt{|z|^2 + 1} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ și concluzia devine :
$\sqrt{2} \le \frac{a+b}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \le 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \le a + b \le \sqrt{2(a^2 + b^2)}$…………………………………...1p
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \le a^2 + b^2 + 2ab \le 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow 0 \le 2ab \le a^2 + b^2 \ (A)$........................1p

În plus, avem : $\sqrt{2} = \frac{|z+1|+|z-1|}{\sqrt{|z|^2+1}}$, doar dacă $0 = 2ab \Leftrightarrow z = -1$ *sau* $z = 1$ *și* $\frac{|z+1|+|z-1|}{\sqrt{|z|^2+1}} = 2$,
doar dacă $2ab = a^2 + b^2$, adică $|z + 1| = |z - 1|$ și $z \in i\mathbb{R}$ 1p

----
Total = 7 puncte