Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Regional „Mathematica – Modus Vivendi”
Ediţia a XIX-a, 23 martie 2024
BAREM CLASA a VII -a

1. Din relația dată avem: $ma=(m+1)b+(2m+1)c$ 1p

Adunând mb în ambii membrii $\Rightarrow m(a+b)=(2m+1)(b+c)$ (1) 1p

Fie d divizor comun pentru m și $2m+1$ 1p

Din $d\,|\,2m, d\,|\,2m+1 \Rightarrow d\,|\,(2m+1)-2m \Rightarrow d\,|\,1 \Rightarrow d=1$ 2p

Numerele m și $2m+1$ sunt prime între ele..........1p

Din $(1) \Rightarrow m\,|\,(b+c)$ și $(2m+1)\,|\,(a+b)$ 1p

----
Total = 7 puncte

2. **a.** $a=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2\cdot3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3\cdot4}}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{\sqrt{99\cdot100}}=$ 1p

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{100}}=$ 1p

$\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{1}{10}$, $a+\frac{9}{10}=1$ 1p

b. Folosind inegalitatea mediilor avem

$\frac{y+24}{4}+\frac{y}{x(y+24)}\geq 2\sqrt{\frac{y+24}{4}\cdot\frac{y}{x(y+24)}}=$ 3p

$=2\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{y}{x}}=\sqrt{\frac{y}{x}}$ 1p

----
Total = 7 puncte

3. **a.** M mijlocul $[DO] \Longrightarrow \Delta AOM$ și ΔADM sunt echivalente, iar N mijlocul $[AO] \Longrightarrow$

ΔNOM și ΔANM sunt echivalente, deci $A_{\Delta OMN}=\frac{1}{4}A_{\triangle AOD}$ 1p

$A_{MNBC}=A_{\triangle MON}+A_{\triangle NOB}+A_{\triangle BOC}+A_{\triangle COM}=$ 1p

$\frac{1}{4}A_{\triangle DAO}+\frac{1}{2}A_{\triangle AOB}+A_{\triangle BOC}+\frac{1}{2}A_{\triangle COD}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)A_{\triangle AOB}=$....................1p

$=\frac{9}{4}A_{\triangle AOB}=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4}A_{ABCD}\Rightarrow\frac{A_{MNBC}}{A_{ABCD}}=\frac{9}{16}$...1p

b. Fie F punctul în care cercul circumscris triunghiului DAE retaie dreapta AB. Rămîne să arătăm că patrulaterul BCEF este inscriptibil 1p

$\sphericalangle ADE=\sphericalangle EFB, \sphericalangle ADE+\sphericalangle ECB=180^0$...1p

$\Rightarrow\sphericalangle EFB+\sphericalangle ECB=180^0\Rightarrow$BCEF inscriptibil...1p

----
Total = 7 puncte

4. **a.** $\alpha^\circ=\beta^\circ=\gamma^\circ=60^\circ\Rightarrow\sphericalangle AOC=\sphericalangle COD=\sphericalangle DOB=60^\circ$..............................1p

$\triangle AOC, \triangle COD, \triangle DOB$ triunghiuri echilaterale$\Rightarrow AC=CD=DB=R=6cm$..........1p

$\sphericalangle DCO=\sphericalangle COA=60^\circ\Rightarrow ABDC$ trapez isoscel , $P_{ABCD}=30cm$ 1p

b. $\alpha^\circ=30^\circ, \beta^\circ=60^\circ, \gamma^\circ=90^\circ$ 1p

Ducem $OM\perp AC, MP\perp OC$ și unim M cu mijlocul N al razei OC 1p

$MN=\frac{R}{2}, \sphericalangle COM=15^\circ, \sphericalangle MNO=150^\circ, \sphericalangle MNP=30^\circ\Rightarrow MP=\frac{R}{4}$..........................1p

Aplicăm teorema Pitagora în $\triangle MPN\Rightarrow PN=\frac{R\sqrt{3}}{4}$ și în $\triangle POM\Rightarrow OM=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow\frac{OM}{R}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 1p

----
Total = 7 puncte