Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Regional
„Mathematica – Modus Vivendi”
Ediție a XIX-a, 23 martie 2024
CLASA a IX- a

1. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*{}_+, n \geq 2$. Demonstrați că
$$\frac{1}{x_2(x_1+x_2)} + \frac{1}{x_3(x_2+x_3)} + \dots + \frac{1}{x_n(x_{n-1}+x_n)} + \frac{1}{x_1(x_n+x_1)} \geq \frac{n^3}{2(x_1+x_2+\dots+x_n)}.$$
Prof.univ Acu Dumitru, Sibiu

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a. $\left[\frac{|x+1|}{2}\right] = \{x\}$.

b. $\left[x+\frac{3}{2}\right] + [x+2] - [4x+6] = -\frac{2x+3}{3}$.

Prof. Dicu Florentina, Râmnicu Vâlcea

3.Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni pozitivi și $S_{2n} = b_1 + b_2 + \dots + b_{2n}$.

a) Calculați rația progresie geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că $b_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$ și $\sum_{k=1}^{10} b_k b_{10-k+1} = 512$.

b) Arătați că $b_1 b_{2n} \leq \left(\frac{S_{2n}}{2n}\right)^2$.

Prof. Necșuliu Ion, Râmnicu Vâlcea

4. Fie triunghiul ABC și punctele $C' \in (AB), B' \in (AC)$, astfel încât $AC' = \frac{1}{k+1} AB$,
$AB' = \frac{k-1}{2k-1} AC, k \in (1, \infty)$ și $\{M\} = CC' \cap BB', \{A'\} = AM \cap BC$.
a. Arătați că $\overrightarrow{BA'} = (k-1)\overrightarrow{A'C}$.
b. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MB} = (1-k)\left(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{MC}\right)$.

Prof. Necșuliu Ion., Râmnicu Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.