Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudeţean
„Mathematica – Modus Vivendi”
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
CLASA a V -a

1. a. Determinaţi restul împărţirii numărului $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8$ la 4;
b. Aflaţi suma cifrelor numărului $2^{2024} \cdot 5^{2025} - 2^{2023} \cdot 5^{2024}$.

Prof. Dicu Florentina, Râmnicu Vâlcea

2. a. Dacă $a = 4^3 \cdot 8^{10} : 2^{34}$ şi $(2a+1) : b = 81^{12} : 27^{15} : 9$, atunci calculaţi

$$(a-b)^1 + (a-b)^2 + (a-b)^3 + \ldots + (a-b)^{2025} ;$$

b. Fie m şi n două numere naturale nenule. Împărţind numărul m la numărul n obţinem câtul 6 şi restul 10. Arătaţi că $m + n \geq 87$.

Prof. Necşuliu Ion, Râmnicu Vâlcea

3. Găsiţi numerele $\overline{ab}$ scrise în baza de numeraţie 10, astfel încât
a. $\overline{ab} = 1 + a + a^2$;
b. $\overline{ab} = 1 + b + b^2$.

Prof. univ. Dr. Dumitru Acu, Sibiu
Prof. dr. Cătălin Pană, Râmnicu Vâlcea

4. a. Demonstraţi că pătratul sumei tuturor cifrelor este egal cu 2025;
b. Demonstraţi că, pentru orice număr natural nenul n, numărul 2025^n poate fi scris ca diferenţă de două pătrate perfecte nenule.

Prof. Dicu Florentina, Râmnicu Vâlcea

Notă: Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudețean „Mathematica – Modus Vivendi”
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
BAREM CLASA a V -a

1. a. $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8 = 1 + 2 + 2^2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^6) =$ 1p
$a = 3 + 4(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^6)$ 1p
$3 < 4;\ 4(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^6) \vdots 4$, deci restul este 3 ....1p
b. $2^{2024} \cdot 5^{2025} - 2^{2023} \cdot 5^{2024} = 2^{2023} \cdot 2 \cdot 5^{2024} \cdot 5 - 2^{2023} \cdot 5^{2024} =$ 1p
$2^{2023} \cdot 2 \cdot 5^{2024} \cdot 5 - 2^{2023} \cdot 5^{2024} = 2^{2023} \cdot 5^{2024}(10-1) =$ 1p
$2^{2023} \cdot 5^{2024}(10-1) = (2 \cdot 5)^{2023} \cdot 5 \cdot 9 = 10^{2023} \cdot 45$ 1p
Suma cifrelor este $4+5+0+\ldots+0=9$ 1p

Total = 7 puncte

2. a. $a = 2^6 \cdot 2^{30} : 2^{34} = 2^2 = 4$ 1p
$81^{12} : 27^{15} : 9 = 3^{48} : 3^{45} : 3^2 = 3$ 1p
$(2a+1) : b = 3 \Rightarrow 9 : b = 3 \Rightarrow b = 3$ 1p
$(a-b)^1 + (a-b)^2 + (a-b)^3 + \ldots + (a-b)^{2025} = 1^1 + 1^2 + 1^3 + \ldots + 1^{2025} = 2025$ 1p
b. $m = n \cdot 6 + 10, 0 \leq 10 < n \Rightarrow m + n = 7n + 10$ 2p
$n > 10 \Rightarrow n \geq 11 \Rightarrow m + n \geq 7 \cdot 11 + 10 \Rightarrow m + n \geq 87$ 1p

Total = 7 puncte

3. a. Avem $10a + b = 1 + a + a^2 \Rightarrow b = a^2 + 1 - 9a$ 1p
$\Rightarrow 1 - b = a(9 - a)$ 1p
Se observă imediat că $1 \geq b \geq 0 \Rightarrow a = 9, b = 1$. Numărul căutat este 91 ....1p

b. Avem $10a + b = 1 + b + b^2 \Rightarrow 10a = 1 + b^2$ 1p
$u(1 + b^2) = 0 \Rightarrow u(b) \in \{3,7\} \Longrightarrow b \in \{3,7\}$ 1p
Deci, pentru b=3 obținem a=1, iar pentru b=7, obținem a=5. Numerele sunt 13 și 57 ....2p

Total = 7 puncte

4. a. Cifrele sunt: 0,1,2,3,...,9, deci suma lor: S=1+2+...+9=45 ....1p
Pătratul sumei $S^2 = 45^2 = 2025$ 1p
b. Fie $n \in \mathbb{N}^*$
$2025^n = 45^{2n} = 9^{2n} \cdot 5^{2n} = 9^{2n} \cdot 5^{2(n-1)} \cdot 5^2$ 2p
$5^2 = 25 = 169 - 144 = 13^2 - 12^2$ 1p
Deci, $2025^n = 9^{2n} \cdot 5^{2(n-1)} \cdot (13^2 - 12^2) = 9^{2n} \cdot 5^{2(n-1)} \cdot 13^2 - 9^{2n} \cdot 5^{2(n-1)} \cdot 12^2$
$2025^n = \left(9^n \cdot 5^{(n-1)} \cdot 13\right)^2 - \left(9^n \cdot 5^{(n-1)} \cdot 12\right)^2$, scrierea cerută 2p

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân", Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudețean
„Mathematica – Modus Vivendi"
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
CLASA a VI -a

1. a. Fie x şi y două numere raţionale pozitive. Determinaţi cele două numere ştiind că: $\frac{x}{y}=\frac{y+34}{68-x}=\frac{86-y}{x+4}$.

b. Fie $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ două rapoarte de numere raţionale strict pozitive. Dacă suma celor două rapoarte este egală cu produsul lor, determinaţi $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$.

Prof. Elena Drăgan, Râmnicu Vâlcea

2. a. Arătaţi că numărul $5^{2025}+5^{2025}+5^{2027}$ este cub perfect.

b. Arătaţi că există o infinitate de cuburi perfecte de forma $5^a+5^b+5^c$, unde $a,b,c\in\mathbb{N}$.

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu

3. Fie mulțimea $A=\{2a+5b|\ 0\leq a\leq 100 \text{ și } 0\leq b\leq 100\}$.

a. Arătați că numărul 694 este element al mulțimii A.

b. Calculați suma elementelor mulțimii A.

Prof. Elena Drăgan, Râmnicu Vâlcea

4. Pe laturile AB şi AD ale pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ΔABE şi ΔADF, astfel încât punctele E şi F să se găsească în interiorul, respectiv în exteriorul pătratului $ABCD$.

a. Arătaţi că $\boldsymbol{DE \parallel FB}$.

b. Arătaţi că punctele F, E şi C sunt coliniare.

Prof. Cristiana Bologa, Râmnicu Vâlcea

Notă: Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudeţean „Mathematica – Modus Vivendi”
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
BAREM CLASA a VI -a

1. a. $\frac{y+34}{68-x}=\frac{86-y}{x+4}=\frac{y+34+86-y}{68-x+x+4}=\frac{5}{3}$......2 p
$x=5k, y=3k, din\ \frac{y+34}{68-x}=\frac{5}{3}\Rightarrow k=7$......1 p
$x=35, y=21$......1 p
b. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\Rightarrow ad+bc=ac$......1 p
$\frac{ad}{ac}+\frac{bc}{ac}=1$......1 p
$\frac{d}{c}+\frac{b}{a}=1$......1 p

Total = 7 puncte

2. a. $5^{2025}+5^{2025}+5^{2027}=(5^{675}\cdot 3)^3$......2 p
b. $a=3n+2,\ b=c=3n,\ n\in\mathbb{N}$......3 p
$5^a+5^b+5^c=(5^n\cdot 3)^3$......2 p

Total = 7 puncte

3. a. $694=2\cdot 97+5\cdot 100\Rightarrow 694\in A$......1 p
b. $2a+5b+10=2(a+5)+5b=2a+5(b+2)\Rightarrow 2a+5b+10\in A,\ pentru$
$a\leq 95\ sau\ b\leq 98$......2 p
$\{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}\subset A\Rightarrow.\{14,15,16,17,18,19,20,21,22,23\}\subset A$......1 p
$\{684,685,686,687,688,689,690,691,692,693\}\subset A$ este ultima submulţime formată cu 10 elemente consecutive ale mulţimii A......1 p
1, 3, 697 şi 699 $\notin A$......1 p
0+1+2+3+...+700-(1+3+697+699)=243950......1 p

Total = 7 puncte

4. a. $\Delta ADE\ isoscel, \sphericalangle DAE=30^0\Rightarrow\sphericalangle DEA=75^0$......1 p
$\Delta FAB\ isoscel, \sphericalangle FAB=150^0\Rightarrow\sphericalangle AFB=15^0$......1 p
$\Delta FAG\ dr, \sphericalangle AFG=15^0\Rightarrow\sphericalangle FGA=75^0, \{G\}=AE\cap FB$......1 p
$\sphericalangle DEG\equiv\sphericalangle EGB\Rightarrow DE\parallel FB$......1 p
b. $\Delta FDC\ isoscel, \sphericalangle FDC=150^0\Rightarrow\sphericalangle DCF=15^0$......1 p
$\sphericalangle DCE=\sphericalangle DCB-\sphericalangle BCE=15^0$......1 p
$\sphericalangle DCF=\sphericalangle DCE\Rightarrow F,E,C\ coliniare$......1 p

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudețean
„Mathematica – Modus Vivendi”
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
CLASA a VII-a

1. Să se determine toate numerele de trei cifre pentru care o cifră este media aritmetică a celorlalte două, iar o altă cifră este media geometrică a celorlalte două cifre.

Profesor universitar Dumitru Acu, Sibiu

2. Fie ABC un triunghi echilateral si D simetricul lui B fată de C. Notăm cu M mijlocul segmentului [AC] si N mijlocul segmentului [MD]. Arătaţi că AD = 4CN.

Prelucrare G.M. 2023

3. Fie a = $\sqrt{45-\sqrt{2024}}$, b= $\sqrt{45+\sqrt{2024}}$ și x = a-b
   a) Calculaţi a^2+b^2, $a \cdot b$, și x
   b) Determinaţi m, n ∈ Q pentru care $x \cdot (-m+5n+8)+3m-n=-2+n$.

Profesor Roxana Aron, Profesor Simona Pozinărea, Rm. Vâlcea

4. Pe cercul circumscris triunghiului ABC se consideră punctele D si E astfel încât $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$. Perpendiculara EF pe AB, cu F ∈ AB intersectează AD în M și cercul circumscris triunghiului în N, perpendiculara DP pe AC, P ∈ AC intersectează AE in Q și cercul circumscris triunghiului în T.
   a) Arătaţi că MQ ∥ NT,
   b) Dacă măsura $\sphericalangle BAD$ este de 25^0, aflați măsura arcului de cerc NAT.

Prof. Simona Pozinărea, Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudeţean „Mathematica – Modus Vivendi”
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
BAREM CLASA a VII-a

1. Fără a restrânge generalitatea considerăm $\overline{abc}$ numărul căutat
   a= (b+c) : 2 și b^2= a·c 1p
   2a = b + b^2: a , obținem $2a^2$-ab-b^2 =0, ...2p
   (a-b)· (2a+b)=0..........1p
   2a + b = 0 nu se poate, a – b = 0 rezulta a= b=c..........1p
   Numerele sunt: 111;222;333;…999;..........2p

2. Fie AQ ⊥ BC, Q∈ BC..........1p
   Notăm CN = x, avem MB = 2x..........1p
   $AB\sqrt{3}$: 2 = 2x obtinem AB = $(4\sqrt{3}$ x) :3..........1p
   QD = CD + QC rezultă QD = $2\sqrt{3}$x..........2p
   In triunghiul AQD aplicăm teorema lui Pitagora $AD^2 = 16\ x^2$, AD= 4x 1p
   Așadar AD = 4 CN..........1p

3. a) $a^2 + b^2 = 90$..........1p
   a ·b = 1..........1p
   x^2 =88. Rezulta x = $-\ 2\sqrt{22}$..........1p
   b)x = $-\ 2\sqrt{22}$..........1p
   Rezolvam sistemul de ecuatii :$\begin{cases} 2m - 10n = 16 \\ 3m - 2n = -2 \end{cases}$ 2p
   Solutiile sunt : m = n = - 2..........1p

4. a) Notam m(∢ BAD) = m (∢ DAE) = m(∢ EAC) = a
   ∢ADP = ∢AEF = $90^0 - 2a$ 1p
   Cum MQED este patrulater inscriptibil, avem ∢ QME ≡ ∢QDE..........1p
   ∢QDE = ∢ TDE = ∢TNE = m(∢TCE) : 2..........1p
   Dreptele MQ, NT cu secanta NE formează
   unghiurile ∢ QME,∢ TNE corespondente, rezulta MQ ∥ NT 1p
   b)Măsura arcului mic AN = 2 m (∢AEF)= 80^0..........1p
   Măsura arcului mic AT = 2 m (∢ ADP)= 80^0..........1p
   Așadar măsura arcului NAT = 160^0..........1p

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân", Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudețean
„Mathematica – Modus Vivendi"
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
CLASA a VIII -a

1. a. Determinați numerele $x, y \in \mathbb{N}^*$ ştiind că: $9x^2 - 4y^2 + 6x - 16y - 28 = 0$.
b. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:
$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = y^2$

Prof. Elena Drăgan, Râmnicu Vâlcea
Prof. dr.Cătălin Pană, Râmnicu Vâlcea

2. a. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt{\frac{25n+2150}{5n-2}} \in \mathbb{N}$.
b. Determinați numărul natural n ştiind că:
$\frac{2}{3} + \frac{4}{2^4+2^2+1} + \frac{6}{3^4+3^2+1} + \frac{8}{4^4+4^2+1} + \cdots + \frac{2n}{n^4+n^2+1} = \frac{2070}{2071}$.

Prof. Cristiana Bologa, Râmnicu Vâlcea

3. Fie piramida triunghiulară regulată de vârf V şi bază ABC. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $M \in (AB), N \in (AC), P \in (BC)$ astfel încât $MN \perp AC, NP \perp BC, PM \perp AB$.
a. Determinați raportul volumelor piramidelor $VMNP$ și $VABC$.
b. Determinați raportul distanțelor de la punctele M şi respectiv N la planul (VBC).

Prof. Elena Drăgan, Râmnicu Vâlcea

4. Se consideră tetraedrul $VABC$ cu $VA = VB = VC = 13\ cm, 2BC = AB + AC$ şi $3AB = 5AC$.
a. Pentru $BC = 8\ cm$ aflați distanța de la punctul V la planul (ABC) .
b. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului VAC, M este centrul de greutate al triunghiului VAB, I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, arătați că $(GMI) \parallel (VBC)$.

Prof. Daniela Barbu, Râmnicu Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân", Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudeţean „Mathematica – Modus Vivendi"
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
BAREM CLASA a VIII -a

1. a. $(3x+1)^2 - (2y+4)^2 - 13 = 0$ .... 1 p
$(3x+2y+5)(3x-2y-3) = 13$ .... 1 p
$3x+2y+5 = 13$ și $3x-2y-3 = 1$ .... 1 p
b. *Pentru* $x \geq 0$ *avem* $(2x+3)^2 < y^2 < (2x+4)^2 \implies$ *nu avem soluții* .... 1 p
Pentru $x \leq -3$ *avem* $(-x-3)^2 + (-x-3+1)^2 + (-x-3+2)^2 + (-x-3+3)^2 = y^2$
$\implies$ *nu avem soluții* .... 2 p
Prin calcul direct se arată că -2 *și* -1 *nu sunt soluții* .... 1 p

Total = 7 puncte

2. a. $\frac{25n+2150}{5n-2} = 5 + \frac{2160}{5n-2} \in \mathbb{N} \implies 5n-2 \in \{3,8,18,48,108\}$ .... 2 p
$5 + \frac{2160}{5n-2} = pp \implies n \in \{22\}$ .... 1 p
b. $\frac{2n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}$ .... 2 p
$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{2070}{2071}$ .... 1 p
$n = 45$ .... 1 p

Total = 7 puncte

3. a.
ΔMNP *echilateral de latură* x .... 1 p
ΔMAN *dreptunghic cu* $MN = x$ *și* $\sphericalangle AMN = 30^0 \implies AN = \frac{x\sqrt{3}}{3}, AM = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$ .... 1 p
$x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, *unde* $a =$ *latura triunghiului echilateral* ABC .... 1 p
$\frac{V_{VMNP}}{V_{VABC}} = \frac{A_{\Delta MNP}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{3}$ .... 1 p
b. $MO \parallel BC$, *unde* $O =$ *centrul cercului circumscris triunghiului* $ABC \implies d(M,(VBC)) =$
$= d(O,(VBC))$ .... 1 p
$NQ \parallel BC$, *unde* $Q =$ *mijlocul lui* $AO \implies d(N,(VBC)) = d(Q,(VBC))$ .... 1 p

$\frac{d(M,(VBC))}{d(N,(VBC))} = \frac{d(O,(VBC))}{d(Q,(VBC))} = \frac{1}{2}$ .... 1 p

Total = 7 puncte

4. a. $AB = 5k, AC = 3k, BC = 4k \implies \Delta ABC$ *dr în* C .... 1 p
$VO \perp (ABC) \implies O =$ *centrul cercului circumscris triunghiului* $ABC \implies$
O *mijlocul lui* AB .... 1 p
$VO = 12\ cm$ .... 1 p
b. $r = \frac{2A_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}} = k$ .... 1 p

$\frac{VM}{MO} = \frac{VG}{GE}$, $unde\ E = mijlocul\ lui\ AC \Rightarrow MG \parallel OE \parallel BC \Rightarrow MG \parallel (VBC)$..........1 p

Fie $IF \perp AC \Rightarrow IF \parallel BC$ și $IF = k$

Fie $AI \cap BC = \{D\}$

Din teorema bisectoarei calculăm $CD = \frac{3k}{2}$

$\Delta AFI \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{FI}{DC} = \frac{AF}{AC} = \frac{2}{3}$..1 p

$\frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3}$, $unde\ H = mijlocul\ lui\ VC \Rightarrow GF \parallel VC \Rightarrow FG \parallel (VBC)$.............................1 p

$MG \parallel BC, IF \parallel BC \Rightarrow IF \parallel MG \Rightarrow M, G, I, F\ coplanare$

$MG \parallel (VBC), FG \parallel (VBC) \Rightarrow (MGI) \parallel (VBC)$..1 p

----

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân", Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudețean
„Mathematica – Modus Vivendi"
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
CLASA a IX -a

1. a. Să se rezolve în numere reale sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2x_3 = x_2 - x_1 \\ x_2^2 - x_3x_4 = x_3 - x_2 \\ \dots\dots \\ x_{n-1}^2 - x_nx_1 = x_n - x_{n-1} \\ x_n^2 - x_1x_2 = x_1 - x_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

b. Fie $a \in \mathbb{N}, a \geq 5$, arătaţi că $\frac{a^{3n+2}+2a+1}{(2a+1)^{2n+1}+a} > \frac{2a+1}{a}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Prof.Univ.Dr.Dumitru Acu, Univ. "Lucian Blaga", Sibiu; Prof. Dr. Cătălin Pană, Rm. Vâlcea

2. a. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\frac{38-11x}{6} = \left\{\frac{2x+1}{6}\right\} + \left\{\frac{x+17}{3}\right\}$.

GM Nr 5/2023

b. Arătaţi că dacă $x, y, z \in (1,\infty)\setminus\mathbb{Z}$ atunci $\frac{x^2}{\sqrt{[y]\cdot\{z\}}} + \frac{y^2}{\sqrt{[z]\cdot\{x\}}} + \frac{z^2}{\sqrt{[x]\cdot\{y\}}} > 2(x+y+z)$ unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x şi $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x .

Prof. Dr. Cătălin Pană; Prof. Cristian Daniel Cotoarbă, Rm. Vâlcea

3. Fie $(a_n)_{n\geq1}$ un şir de numere reale astfel încât $a_1 = a_2 = 1$ şi $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{p^n}$, $n \geq 1$, unde p este un număr real dat , $p \geq 3$. Să se arate că $a_n < 2$, oricare ar fi $n \geq 1$.

Prof.Univ.Dr.Dumitru Acu, Univ. "Lucian Blaga", Sibiu; Prof. Dr. Cătălin Pană, Rm. Vâlcea

4. a. Fie ABC un triunghi pentru care există un punct P astfel încât

$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\overrightarrow{PA} + \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\overrightarrow{PB} + \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral .

GM Nr 2/2024

b. Fie ΔABC ; M , N pe laturile AB şi BC $astfel$ încât $\frac{AM}{MB} = \frac{\alpha}{\beta}$ şi $\frac{BN}{NC} = \frac{\beta}{\gamma}$.

Notăm $\{P\} = CM \cap AN$. Să se arate că $\frac{1}{\alpha}\cdot\overrightarrow{AP} + \frac{1}{\beta}\cdot\overrightarrow{BP} + \frac{1}{\gamma}\cdot\overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Prof. Dr. Cătălin Pană; Prof. Cristian Daniel Cotoarbă, Rm. Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân", Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudeţean „Mathematica – Modus Vivendi"
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025

BAREM CLASA a IX -a

1.a. Adunăm ecuaţiile sistemului, membru cu membru, şi obţinem:
$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - \cdots - x_{n-1}x_n - x_nx_1 = 0$ 1p
de unde, prin înmulţirea cu 2, obţinem :
$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 = 0$ 1p
De aici găsim:
$x_1 = x_2 = .. = x_n = \alpha \in \mathbb{R}$ 1p

b. Inegalitatea ia forma $a^{3n+3} > (2a+1)^{2n+2}$ sau $(a^3)^{n+1} > ((2a+1)^2)^{n+1}$ 1p
Este suficient să arătăm că $a^3 > (2a+1)^2$, pentru $a \in \mathbb{N}, a \geq 5$ 1p
Folosim inducţia matematică
Pentru $a = 5$ avem $125 > 121$
Presupunem că $a^3 > (2a+1)^2$ şi demonstrăm că $(a+1)^3 > (2a+3)^2$.
Avem $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 > (2a+1)^2 + 3a^2 + 3a + 1 = 7a^2 + 7a + 2$ 1p
Iar $7a^2 + 7a + 2 > (2a+3)^2$, adică $3a^2 - 5a - 7 > 0$, care este verificată pentru $a \geq 5$
deoarece $a(3a-5) > 7$ este evidentă 1p

Total = 7 puncte

2. a. Scriem ecuaţia $\frac{38-11x}{6} = \frac{2x+1}{6} - \left[\frac{2x+1}{6}\right] + \frac{x+17}{3} - \left[\frac{x+17}{3}\right]$ 1p
apoi, regrupând termenii şi folosind proprietăţile părţii întregi, ajungem la forma
$\left[\frac{2x+1}{6}\right] + \left[\frac{2x+4}{6}\right] = \frac{5x-11}{2}$.
Folosind identitatea lui Hermite, ecuaţia devine $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = \frac{5x-11}{2}$ 1p
Notăm $k = \frac{5x-11}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, de unde $x = \frac{2k+11}{5}$. Atunci $\left[\frac{4k+27}{15}\right] = k \Rightarrow k \leq \frac{4k+27}{15} < k+1$
de unde $k \in \left(\frac{12}{11}, \frac{27}{11}\right] \cap \mathbb{Z}$. Prin urmare $k = 2$ şi $x = 3$ 1p

b. $\sqrt{[x] \cdot \{y\}} < \frac{[x]+\{y\}}{2}$ (inegalitatea mediilor) $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{[x]\cdot\{y\}}} > \frac{2}{[x]+\{y\}} \Big| \cdot z^2$
$\Rightarrow \frac{z^2}{\sqrt{[x]\cdot\{y\}}} > \frac{2z^2}{[x]+\{y\}}$ 1p
Dacă notăm cu S membrul stâng al inegalităţii$\Rightarrow S > \frac{2x^2}{[y]+\{z\}} + \frac{2y^2}{[z]+\{x\}} + \frac{2z^2}{[x]+\{y\}}$ 1p
C.B.S. $\left[\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\frac{A}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{C}{\sqrt{c}}\right)^2\right] > (A+B+C)^2$
$\frac{A^2}{a} + \frac{B^2}{b} + \frac{C^2}{c} > \frac{(A+B+C)^2}{a+b+c}$
$\frac{2x^2}{[y]+\{z\}} + \frac{2y^2}{[z]+\{x\}} + \frac{2z^2}{[x]+\{y\}} = 2\left(\frac{x^2}{[y]+\{z\}} + \frac{y^2}{[z]+\{x\}} + \frac{z^2}{[x]+\{y\}}\right) > 2 \cdot \frac{(x+y+z)^2}{[x]+\{x\}+[y]+\{y\}+[z]+\{z\}}$ 1p
$2 \cdot \frac{(x+y+z)^2}{[x]+\{x\}+[y]+\{y\}+[z]+\{z\}} = \frac{2(x+y+z)^2}{x+y+z} \Rightarrow S > 2(x+y+z)$ 1p

----
Total = 7 puncte

3. Utilizăm inducția matematică dupa n. Avem:

$a_1 = a_2 = 1 < 2$, $a_3 = a_2 + \frac{a_1}{p} = 1 + \frac{1}{p} < 2$ deoarece $p > 1$ 1p

Presupunem $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} < 2$. Avem

$a_3 = a_2 + \frac{a_1}{p}$

$a_4 = a_3 + \frac{a_2}{p^2}$

...

$a_n = a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{p^{n-2}}$, de unde, prin adunarea membru cu membru, obținem 2p

$a_n = a_2 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \dots + \frac{a_{n-2}}{p^{n-2}} < 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^{n-2}}\right) =$..1p

$= 1 + \frac{2}{p} \cdot \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^{n-3}}\right) = 1 + \frac{2}{p} \cdot \frac{1 - \frac{1}{p^{n-2}}}{1 - \frac{1}{p}} =$...1p

$= 1 + \frac{2}{p-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{p^{n-2}}\right) < 1 + \frac{2}{p-1} < 2$, pentru $p \geq 3$ 1p

Așadar, $a_n < 2$,pentru oricare ar fi $n \geq 1$ 1p

Total = 7 puncte

4. a. În relația din enunț înlocuim $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}$ 1p

$\Rightarrow \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, de unde, ținând cont că $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt vectori necoliniari, deducem că $\frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow a = b = c$

$\Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral 1p

b. Fie $BP \cap AC = \{S\} \xRightarrow{Th.Ceva} \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{SC}{SA} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{SC}{SA} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{SC}{SA} = 1 \Leftrightarrow \frac{SC}{SA} = \frac{\gamma}{\alpha}$ 1p

Dar : $\frac{BN}{NC} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{NB} = -\frac{\beta}{\gamma} \cdot \overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{\gamma} \cdot \overrightarrow{AC}}{1 + \frac{\beta}{\gamma}} = \frac{\gamma \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}}{\beta + \gamma}$ 1p

Folosind relația „Van Aubel" : $\frac{AP}{PN} = \frac{AM}{MB} + \frac{AS}{SC} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma + \alpha\beta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha(\gamma + \beta)}{\beta\gamma}$ 1p

$$\Rightarrow \frac{AP}{AN} = \frac{\alpha(\beta + \gamma)}{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{\alpha(\beta + \gamma)}{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{\alpha(\beta + \gamma)}{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma} \cdot \frac{\gamma \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}}{\beta + \gamma}$$

$= \frac{\alpha}{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma} \cdot \left(\gamma \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \overrightarrow{AP} = \frac{\gamma \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}}{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma}$ 1p

Analog : $\frac{1}{\beta} \cdot \overrightarrow{BP} = \frac{\alpha \cdot \overrightarrow{BC} + \gamma \cdot \overrightarrow{BA}}{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma}$; $\frac{1}{\gamma} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{\beta \cdot \overrightarrow{CA} + \alpha \cdot \overrightarrow{CB}}{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma}$

$\overset{(+)}{\Longrightarrow} \frac{1}{\alpha} \cdot \overrightarrow{AP} + \frac{1}{\beta} \cdot \overrightarrow{BP} + \frac{1}{\gamma} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{\alpha\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}\right) + \beta\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\right)}{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma} = \vec{0}$ 1p

----

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudeţean
„Mathematica – Modus Vivendi”
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025

CLASA a X -a

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to (-1, +\infty), f(x) = 2^x - 1$.

a. Rezolvați ecuația $f^{-1}(x) = 130 - f(x)$, unde f^{-1}este inversa funcției f.

b. Demonstrați că pentru orice număr natural impar y există un număr natural nenul x, astfel încât numărul $f(x)$să fie divizibil cu y.

Prof. Necşuliu Ion, Râmnicu Vâlcea

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $log_{a^3+a}(x^6 + 2x^4 + x^2) = 2\, log_a x, a > 0, a \neq 1$.

Prof. univ.dr. Dumitru Acu, Sibiu

3. a. Să se găsească valorile reale ale lui $x$pentru care și $x^{log_3(x-2)} + 4(x-2)^{log_3 x} = 5x^3$.

b. Pentru ce valori ale parametrului real a, soluțiile ecuației $\frac{3^{x+1}+a\cdot 5^x}{3^x-a\cdot 5^x} = 4$ sunt întregi.

Prof. Dicu Florentina, Râmnicu Vâlcea

4. Fie numerele complexe $z_k = \frac{1}{k\, ln\, k} + \frac{1}{k} i, k \in \{3, \ldots, 16\}$.

a. Arătați că $Re(z_k) + Im(z_k) \leq \sqrt{2}|z_k|, \forall k \in \{3, \ldots, 16\}$.

b. Demonstrați că orice rădăcină a ecuației $1 + z_3 \cdot z + z_4 \cdot z^2 + \ldots + z_{16} \cdot z^{14} = 0$ are modulul mai mare ca $\frac{1}{2}$.

Prof. Necşuliu Ion., Râmnicu Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân", Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudeţean „Mathematica – Modus Vivendi"
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025

BAREM CLASA a X -a

1. a. $2^x - 1 = y \Rightarrow 2^x = y + 1 \Rightarrow x = log_2(y+1)$ 1p

$f^{-1}(x) = 130 - f(x) \Leftrightarrow log_2(x+1) + 2^x - 1 = 130$....................1p

Fie $g(x) = log_2(x+1) + 2^x - 1, g: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, strict crescătoare....................1p

Cum $g(x) = g(7)$şi g injectivă $\Rightarrow x = 7$ este singura soluţie....................1p

b. Fie numerele naturale $f(1), f(2), \ldots, f(y), f(y+1)$....................1p

Cel puţin două dintre ele dau acelaşi rest r prin împărţire la y

Fie acestea $f(i)$şi $f(j)$cu $1 \le i < j \le y + 1 \Rightarrow f(j) - f(i)$ divizibil cu y 1p

Deci, $2^j - 1 - (2^i - 1) \vdots y$, de unde $2^i(2^{j-i} - 1) \vdots y \Longrightarrow$ pentru y impar şi $x = j - i$ avem $f(x) \vdots y$ 1p

----

Total = 7 puncte

2. $log_{a(a^2+1)} x^2 (x^2+1)^2 = 2\, log_a x \Leftrightarrow log_{a(a^2+1)} x (x^2+1) = log_a x$ 1p

Notăm $log_a x = t, \Rightarrow x = a^t, x > 0$....................1p

$log_{a(a^2+1)} a^t (a^{2t}+1) = t \Rightarrow a^t(a^{2t}+1) = a^t(a^2+1)^t$....................1p

$\Rightarrow a^{2t} + 1 = (a^2+1)^t \Rightarrow \left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^t + \left(\frac{1}{a^2+1}\right)^t = 1$ 1p

Funcţia $t \to \left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^t + \left(\frac{1}{a^2+1}\right)^t$ este strict descrescătoare....................1p

Prin urmare ecuaţia are cel mult o soluţie.Cum t=1 este soluţie 1p

Rezultă pentru ecuaţia dată avem soluţia unică $x = a$ 1p

----

Total = 7 puncte

3. a. Cum $x^{log_3(x-2)} = (x-2)^{log_3 x}$, ecuaţia devine: $x^{log_3(x-2)} = x^3$....................2p

$\Rightarrow log_3(x-2) = 3 \Rightarrow x = 29$, care convine....................1p

b. Ecuaţia se scrie $5a \cdot 5^x = 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = 5a$....................1p

Dacă $a \le 0$, atunci ecuaţia nu are soluţie; iar dacă $a > 0$, atunci ecuaţia are soluţia $x = log_{\frac{3}{5}} 5a$....................1p

Pentru $x = n \in \mathbb{Z}$ avem $\frac{3^n}{5^n} = 5a \Rightarrow a = \frac{3^n}{5^{n+1}}$....................2p

----

Total = 7 puncte

4. a. Folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică avem

$\frac{Re(z_k) + Im(z_k)}{2} \le \sqrt{\frac{Re^2(z_k) + Im^2(z_k)}{2}} = \frac{|z_k|}{\sqrt{2}}$ 1p

$\Leftrightarrow Re(z_k) + Im(z_k) \le \sqrt{2}|z_k|$ 1p

b. Avem $|z_k| < \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$....................1p

Presupunem că $|z| \le \frac{1}{2}$....................1p

Obţinem, $|z_3 \cdot z + z_4 \cdot z^2 + \ldots + z_{16} \cdot z^{14}| \le \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{14}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{14}\right) < 1$......2p

Finalizare 1p

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudețean
„Mathematica – Modus Vivendi”
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
CLASA a XI -a

1. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Să se demonstreze relația : $A^3 = 43 \cdot A - 42 \cdot I_2$.

b. Dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - d_n}{b_n - c_n}$.

Prof. Dr. Cătălin Pană; Prof. Cristian Daniel Cotoarbă, Rm. Vâlcea

2. a. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin 7x) - tg\,(tg\,7x\,)}{\sin 7x - tg\,7x}$.

b. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale definit prin relația $x_{n+1} = x_n^2 - 2\,, n \geq 1\,;\; x_1 = 45$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$.

Prof. Dr. Cătălin Pană; Prof. Cristian Daniel Cotoarbă, Rm. Vâlcea

3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+3}^3 \cdot x_n^2}{x_{n+2}^4 \cdot x_{n+1}} = t > 0$.

Calculați limita șirului $\left(x_{n+1}^3 \cdot x_n^2\right)^{\frac{1}{(5n+1)(5n+3)}}, n \geq 1$.

Prof.Univ.Dr.Dumitru Acu, Univ. "Lucian Blaga", Sibiu

4. Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A^2B = BA^2$ și $Tr(A) \cdot Tr(A^*) \neq \det A$.

Arătați că $AB = BA$.

GM Nr.10/2023

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân", Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudețean „Mathematica – Modus Vivendi"
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
BAREM CLASA a XI -a

1. a. $A^2-(TrA)\cdot A+(detA)\cdot I_2=O_2$
$A^2-7A+6I_2=O_2 \Rightarrow A^2=7A-6I_2$ 1p
$A^3=A^2\cdot A=(7A-6I_2)\cdot A=7A^2-6A=7(7A-6I_2)-6A=49\cdot A-42\cdot I_2-6\cdot A$
$A^3=43\cdot A-42\cdot I_2$ 1p

b. Metoda Hamilton-Cayley
$\det(A-xI_2)=0$ cu răd $x_1=1$; $x_2=6$ 1p
$A^n=A_1x_1^n+A_2x_2^n$
$A^n=A_1+6^nA_2$ 1p
$\begin{cases} A_1+A_2=I_2 \\ A_1+6A_2=A \end{cases} \Rightarrow A^n=\begin{pmatrix} \frac{6-6^n}{5} & \frac{3}{5}(1-6^n) \\ \frac{2}{5}(6^n-1) & \frac{6^{n+1}-1}{5} \end{pmatrix}$ 1p
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-d_n}{b_n-c_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(6-6^n)-(6^{n+1}-1)}{(3-3\cdot 6^n)-(2\cdot 6^n-2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6^{n+1}-6^n+7}{-5\cdot 6^n+5}=$ 1p
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6^n(-6-1+\frac{7}{6^n})}{6^n(-5+\frac{5}{6^n})}=\frac{7}{5}$ 1p

----
Total = 7 puncte

2. a. $L=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin 7x)-\sin(tg\,7x)}{\sin 7x-tg\,7x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(tg\,7x)-tg\,(tg\,7x)}{\sin 7x-tg\,7x}=L_1+L_2$

$L_1=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin(\frac{\sin 7x-tg\,7x}{2})\cos(\frac{\sin 7x+tg\,7x}{2})}{\frac{\sin 7x-tg\,7x}{2}\cdot 2}=1$ 1p
$L_2=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(tg\,7x)-\frac{\sin(tg\,7x)}{\cos(tg\,7x)}}{\sin 7x-\frac{\sin 7x}{\cos 7x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(tg7\,x)\left(1-\frac{1}{\cos(tg\,7x)}\right)}{\sin(7x)\left(1-\frac{1}{\cos 7x}\right)}=$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(tg\,7x)}{\sin 7x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(tg\,7x)}{1-\cos 7x}=1$ 1p
$L=L_1+L_2=1+1=2$ 1p

b. $x_{n+1}^2-4=(x_n^2-2)^2-4=x_n^4-4x_n^2=x_n^2(x_n^2-4)=$
$=x_n^2[(x_{n-1}^2-2)^2-4]=x_n^2(x_{n-1}^4-4x_{n-1}^2)=x_n^2x_{n-1}^2(x_{n-1}^2-4)=$
$=\cdots=(x_nx_{n-1}\dots x_1)^2(x_1^2-4)=(2025-4)(x_nx_{n-1}\dots x_1)^2$ 1p
$x_{n+1}^2-4=2021(x_nx_{n-1}\dots x_1)^2$
$\frac{x_{n+1}^2}{(x_nx_{n-1}\dots x_1)^2}-\frac{4}{(x_nx_{n-1}\dots x_1)^2}=2021$ 1p
$\left(\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\dots x_n}\right)^2=2021+\frac{4}{(x_1x_2\dots x_n)^2}$ 1p
$x_1>2$, $\quad x_{n+1}=x_n^2-2>2^2-2=2$
Demonstrăm prin inducție $x_n>2$
$0\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{(x_1x_2\dots x_n)^2}<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{(2^n)^2}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\dots x_n}=\sqrt{2021}$ 1p

----
Total = 7 puncte

3. $\ln t = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{x_{n+3}^3 \cdot x_n^2}{x_{n+2}^4 \cdot x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}(3y_{n+3} - 4y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n)$, unde $\ln x_n = y_n$ 1p

$\lim_{n\to\infty} \ln(x_{n+1}^3 \cdot x_n^2)^{\frac{1}{(5n+1)(5n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_{n+1}^3 \cdot x_n^2}{(5n+1)(5n+3)} =$ 1p

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3y_{n+1}+2y_n}{(5n+1)(5n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3y_{n+2}+2y_{n+1}-3y_{n+1}-2y_n}{(5n+6)(5n+8)-(5n+1)(5n+3)} =$ 1p

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3y_{n+2}-y_{n+1}-2y_n}{50n+45} = \lim_{n\to\infty} \frac{3y_{n+3}-y_{n+2}-2y_{n+1}-3y_{n+2}+y_{n+1}+2y_n}{50n+95-50n-45} =$ 1p

$= \frac{1}{50} \lim_{n\to\infty}(3y_{n+3} - 4y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n) =$ 1p

$= \frac{1}{50} \ln t = \ln t^{\frac{1}{50}}$ 1p

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}^3 \cdot x_n^2)^{\frac{1}{(5n+1)(5n+3)}} = t^{\frac{1}{50}} = \sqrt[50]{t}$ 1p

----

Total = 7 puncte

4. Fie $C(B) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) | BX = XB\}$. Se verifică ușor că pentru orice $X, Y \in C(B)$ și orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avem $\alpha X + \beta Y \in C(B)$ (1)..1p

Scriind relația Hamilton-Cayley pentru matricea A, obținem

$A^3 - Tr(A) \cdot A^2 + Tr(A^*) \cdot A - \det(A) \cdot I_3 = O_3$ (2)...1p

Din ipoteză avem că $A^2 \in C(B)$. Cum $I_3 \in C(B)$, din (1) și (2) deducem că

$A^3 + Tr(A^*) \cdot A \in C(B)$, de unde $Tr(A) \cdot A^3 + Tr(A) \cdot Tr(A^*) \cdot A \in C(B)$ (3) 1p

Multiplicând (2) cu A, obținem $A^4 + Tr(A^*) \cdot A^2 = Tr(A) \cdot A^3 + \det(A) \cdot A$ 1p

Cum $A^2, A^4 \in C(B)$, din (1) rezultă $Tr(A) \cdot A^3 + \det(A) \cdot A \in C(B)$ (4).................1p

Folosind (1), din (3) și (4) obținem $(Tr(A) \cdot Tr(A^*) - \det(A)) \cdot A \in C(B)$ 1p

și cum $Tr(A) \cdot Tr(A^*) - \det(A) \neq 0$, rezultă $A \in C(B)$, adică $AB = BA$ 1p

----

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân", Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudeţean
„Mathematica – Modus Vivendi"
Ediţia a XX-a, 29 martie 2025
CLASA a XII-a

1. Se consideră mulţimea $M_2(Z_3)$ şi submulţimea $G = \left\{X \in M_2(Z_3) \mid X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix}\right\}$.

a. Să se arate că mulţimea $H = G\setminus\{O_2\}, O_2 = \begin{Bmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{Bmatrix}$ este subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $M_2(Z_3)$;

b. Rezolvaţi ecuaţia $X^2 = I_2, X \in G$.

2. Calculaţi $\int \frac{a^x(ba^x cosbx + c\, lna\, sin^2 bx)}{(a^x + c\, sinbx)^2} dx$.

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu
Prof. dr. Cătălin Pană, Râmnicu-Vâlcea

3. Se consideră $(A, +, \cdot)$ inel cu unitate şi $a, b \in A$.

a. Arătaţi că dacă există $x \in A$ astfel încât $(ab - 1) \cdot x = 1 => \exists\, y \in A$ pentru care $(ba - 1) \cdot y = 1$;

b. Dacă $ab^2a = ab + ba => ab^2 = b^2a$ şi $a^2b = ba^2$.

Gazeta Matematică

4. Fie $f: [-1,1]$ $f(x) = \int_0^{arcsinx} e^{sin^2 t}\, dt$.

Demonstraţi că $\int_0^1 xf(x)e^{-x^2}\, dx + \frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4}$.

Prof. Simona Pozinărea, Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea
Concursul Interjudețean „Mathematica – Modus Vivendi”
Ediția a XX-a, 29 martie 2025
BAREM CLASA a XII-a

1. a. Fie $X \in H, X = A(a,b)$ și $Y \in H, Y = A(c,d), X \cdot Y = A(ac + \hat{2}bd, bc + ad) \in H$.........1p
Dacă $X = A(a,c) \in H$ atunci $det(X) \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$ 1p
$X^{-1} = A(ad^{-1}, \hat{2}bd^{-1}) \in H$ 1p
$(H,\cdot)$ subgrup pentru $(G - \{O2\})$ 1p
b. $X^2 = I_2 <=> \begin{cases} a^2 + \hat{2}b^2 = \hat{1} \\ ab = \hat{0} \end{cases}$ 1p
Pentru $a = \hat{0}$ ecuația $\hat{2}b^2 = \hat{1}$ nu are soluție 1p
Pentru $b = \hat{0} => a \in \{\hat{1}, \hat{2}\} => X_1 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ 1p

----
Total = 7 puncte

2. a. Căutăm $F(x) = \frac{a^x sinbx}{a^x + csinbx}$ 2p
$\left(\frac{a^x sinbx}{a^x + csinbx}\right)' = \frac{1}{(a^x + csinbx)^2}$.
$\cdot [(a^x lna\ sinbx + ba^x cosbx)(a^x + csinbx) - a^x sinbx(a^x lna + cb\ cosbx)]$ 3p
$=> I = \frac{a^x sinbx}{a^x + csinbx} + c$ 2p

Total = 7 puncte

3. a. Fie $x \in A$ astfel încât $(ab-1)x = 1 => (ba-1)(bxa-1) =$
$= babxa - ba - bxa + 1 = b((ab-1)+1)xa - ba - bxa + 1 =$
$b\underbrace{(ab-1)x}a + bxa - ba - bxa + 1 = 1 =>$ aleg $y = bxa - 1$.......................2p
b. Dacă $ab^2a = ab + ba => (ab-1)(ba-1) = 1$ 1p
Fie $x = ba - 1 => (ab-1)x = 1 => (bab - b)x = b =>$
$=> b(ba-1) = (ab-1)b => ab^2 = b^2a$ 2p
Din a) $=> y \in A$ pentru care $(ba-1)y = 1 => y = ab - 1 => (ba-1)(ab-1) = 1 =>$
$=> ba^2b = ba + ab => a^2b = ba^2$ 2p

Total = 7 puncte

4. Notăm $I = \int_0^1 xf(x)e^{-x^2}\,dx$, $f'(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$
....2p
Integrând prin părți $I = -\frac{1}{2e}f(1) + \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 1p
Notăm $sint = y => f(1) = \int_0^1 \frac{e^{y^2}}{\sqrt{1-y^2}}dy$ 2p
$I + \frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}arcsinx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ 2p

----
Total = 7 puncte